高中数学讲义

谢子涵

Day9-Day27
09/07/22 至 10/10/22

目录

1 集合

高中集合内容与数学分析的集合内容大同小异，所以我会直接引用数学分析的内容来写，对于高中没有的内容会有特别标注。

1.1 集合的定义

定义 1：集合是具有某种特定性质的具体或抽象的对象汇集成的总体，这些对象称为该集合的元素。

一般情况下, 用大写字母 $A, B, C, \ldots$ 表示集合, 用小写字母 $a, b, c, \ldots$ 表示元素。集合可以通过 $A = \{a, b, c, \ldots\}$ 来表示集合 A 含有元素 $a, b, c, \ldots$

例如：由 2∼5 之间整数组成的集合 A，其中 A 有 2,3,4,5 这四个元素。可表示为 $A = \{2, 3, 4, 5\}$

集合的性质：无序性，互异性以及元素具有确定性。

无序性：元素先后位置不会影响集合，如:$\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$

互异性：元素之间互不相同，如不存在 $\{a, a, b\}$

确定性：元素是一个确定的对象，高中数学不研究模糊性质，如不存在元素"高个子"。

空集：不包含任何元素的集合，用 $\emptyset$ 表示

全集：含有研究的所有对象的集合

集合的表示方法：

枚举法: 将元素逐一列举，如 $A = \{a, b, c, d\}$

描述法：描述元素具有的性质 P, 如 $A = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}$

高中还有特别说明用 Venn 图以及区间可表示集合

1.1.1 集合与元素、集合的关系

集合与元素的关系：

$x \in S$,(x 属于 S);

$x \notin S$ 与 $x \overline{\in} S$ 都表示 (x 不属于 S)

集合与集合的关系：
$S \subset T$, 意为 $\forall x \in S \Rightarrow x \in T$, 称为 S 是 T 的子集 (高中用 $S \subseteq T$)
$S \not\subset T$, 意为 $\exists x \in S \Rightarrow x \notin T$，故 S 不是 T 的子集 (高中用 $S \nsubseteq T$ 表示)
$S = T \iff S \subset T, T \subset S$
$S \subsetneqq T$, 意为 $S \subset T, \exists x \in T, x \notin S$,$S$ 称为 T 的真子集

区间表示：
(a,b)=$\{x|a < x < b\}$, 闭区间
$[a,b]$ =$\{x|a \leq x \leq b\}$, 开区间
$(a,b]$ =$\{x|a < x \leq b\}$, 半开半闭区间

常用集合：$\mathbb{R}$ 实数集,$\mathbb{Q}$ 有理数集,$\mathbb{Z}$ 整数集,
$\mathbb{N}$ 自然数集,$\mathbb{N}^{+}$ 或 $\mathbb{N}^{*}$ 正整数集
蕴含关系：$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}^{+}$

计算一个集合的子集个数，如果集合 $T = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$，则共有 2^n 个子集，$2^n - 1$ 个真子集，$2^n - 2$ 个非空真子集，其结论由

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

推出，$\binom{n}{i}$ 就是组合数，高中用 C_n^i 表示，上下是相反的

1.2 集合的运算

集合的基本运算分为交并补差，高中不学差运算
交集：$S \bigcap T = \{x|x \in S$ 且 $x \in T\}$
并剂：$S \bigcup T = \{x|x \in S$ 或 $x \in T\}$
补集：S_X^C 或 $C_X S$=$X \backslash S$, 通常将 S_X^C 记为 S^C,X 为全集
差集：$S \backslash T\{x|x \in S$ 且 $x \notin T\}$

运算律：
交换律：
$A \bigcup B = B \bigcap A$
$A \bigcap B = B \bigcap A$

结合律：
$A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$
$A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$
分配律：
$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$
$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

对偶率（德摩根率，有些旧书叫反演率）：
$(A\bigcup B)^C=A^C\bigcap B^C$
$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$

有限集与无限集：有限个元素组成为有限集，不是有限集的集合为无限集 (高中一般研究有限集)

集合 A 的元素个数，高中常用 $cardA$ 表示，有

$$card(A\bigcup B)=cardA+cardB-card(A\bigcap B)$$

1.3 充分条件与必要条件

对于两个事件 p,q, 如果：
$p\Rightarrow q$, 则称事件 p 是事件 q 的充分条件，而 q 是 p 的必要条件
$p\nRightarrow q$, 则称事件 p 不是事件 q 的充分条件，而 q 不是 p 的必要条件
$p\Leftrightarrow q$, 则称事件 p 是事件 q 的充分必要条件简称充要条件

举个例子：$p:x<3$,$q:x<2$, 不难知道，p 是 q 的必要不充分条件，也就是 $p\nRightarrow q,q\Rightarrow p$

1.4 全称量词与存在量词

“若 p 则 q” 称为一个命题“所有的，任意一个”为全称量词，用 $\forall$ 表示
“存在一个，至少有一个”为存在量词，用 $\exists$ 表示

事件 p 的否定用 $\neg p$ 表示，概率论中也有类似表示如概率空间中 A 的反，就是 $\overline{A}$

$p \wedge q$ 为 p 且 q, 可以想为串联电路或交集
$p \vee q$ 为 p 或 q, 可以联想并联电路或并集

互逆命题：“若 p 则 q” 的逆命题为“若 q 则 p”
互否命题：“若 p 则 q” 的否命题为“若 $\neg p$ 则 $\neg q$”
互为逆否命题：“若 p 则 q” 的逆否命题为“若 $\neg q$ 则 $\neg p$”

对于一些不好求的概率或事件，通常求反来解决，如有：

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

主要记住原命题与逆否命题真假一致就行了
对于全称量词与存在量词的否定有：
$\forall x \in S, p(x)$
$\exists x \in S, \neg p(x)$
同理有：
$\exists x \in S, p(x)$
$\forall x \in S, \neg p(x)$

2 不等式

2.1 不等式基本性质

用不等号 $(<,>,\leqslant,\geqslant,\neq)$ 表示不等关系的式子叫不等式。基本事实：对于 $a,b\in\mathbb{R}$ 有

$a-b>0 \iff a>b$

$a-b=0 \iff a=b$

$a-b<0 \iff a<b$

不等式性质 1，$a>b \iff b<a$(对称性)

2，$a>b,b>c \iff a>c$(传递性)

3，如果 $a>b$，则 $a+c>b+c$

4，如果 $a>b,c>0$，则 $ac>bc$

如果 $a>b,c<0$，则 $ac<bc$

5，如果 $a>b,c>d$，则 $a+c>b+d$

6，如果 $a>b>0,c>d>0$，则 $ac>bd$

7，如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n(n\in\mathbb{N},n\geqslant 1)$

8，如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbb{N},n\geqslant 2)$

比较大小：1，作差法；2，作商法。

1，利用 $a-b>0 \iff a>b$ 思路，将其化为恒等式后判断。

2，$a>0,b>0$ 有 $\frac{a}{b}>1\Rightarrow a>b$，可用 $\frac{a}{b}$ 的值来判断。

2.2 基本不等式

由 $(a+b)^2\geqslant 0$ 推出：

$$a^2+b^2\geqslant 2ab$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立

如果令 $a=\sqrt{x},b=\sqrt{y}$ 则

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}(x,y\geqslant 0)$$

这是平均值不等式的一种，在“2.4.3 平均不等式”会提到。

基本不等式常见变形：

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2,(ab>0) \tag{1}$$

两个不定值的最值，通常是通过变形为一方，使另一方为定值。

2.3 一元二次不等式

$$ax^2+bx+c>0$$

画出 ax^2+bx+c 的函数图像，可知，其实就是求函数图像在 x 轴以上的部分的 x 取值范围。同理可得 $ax^2+bx+c<0$ 就是求函数图像在 x 轴以下的部分的 x 取值范围。

一般解法:
1，求 $\sqrt{\Delta}=\sqrt{b^2-4ac}$
2，通过 a 判断开口方向,$a>0$ 开口向上，$a<0$ 开口向下
3，计算 x 取值范围

2.4 补充

不是很常用但还是蛮重要的一些不等式，达不到竞赛高度，像是平均值不等式已经算是高考很常用的二级结论了。

2.4.1 柯西不等式

$$(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)^2\leqslant(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)(\sum_{i=1}^{n}y_i^2)$$

当且仅当 $\frac{x_i}{y_i}$ 为定值时等号成立，看着蛮复制，其实就是内积公式的 n 维坐标展开，说白了本质就是

$$\frac{\vec{x}\vec{y}}{|x|\,|y|}=\cos\theta$$

$$0\leqslant\cos^2\theta\leqslant 1$$

2.4.2 三角不等式

对于 $\forall a, b \in \mathbb{R}$ 有：

$$||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$$

2.4.3 平均值不等式

设有 n 个正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ，记：
$A_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$,
$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$,
$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}+}$,
$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$
A_n, G_n, H_n, Q_n
分别是 n 个正整数的算术平均数，几何平均数，调和平均数以及平方平均数，它们有如下关系：

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant Q_n$$

基本不等式就只是 $G_2 \leqslant A_2$

3 函数的概念与性质

函数这节我觉得高中不够好，直接上数分的教材完全没啥问题，高中特有的幂函数我多分一节来讲

3.1 映射

映射是两集合的一种对应关系。

$x \in X, y \in Y$，通过规则 f，使任意 x，有唯一 y 对应，称 f 为 X 到 Y 的映射，记为 $f : X \to Y$

$$x \mapsto y = f(x)$$

其中，y 称为映射 f 的之下 x 的像
x 称为映射 f 之下 y 的逆像或原像
X 为定义域，记为 D_f，Y 为陪域（国内教材一般没有）
x 的像 y 的全体为值域，记为 R_f，$R_f \subset Y$

$$R_f = \{y | y \in Y \land y = f(x), x \in X\}$$

构成一个映射的三要素 (高中为函数的三要素):
1，X，即 $D_f = X$
2，Y，$R_f \subset Y$
3，f，使每一个 $x \in X$，有唯一的 $y = f(x)$
(映射要求元素的像是唯一的，但不要求逆像也具有唯一性)

若：$f : X \to Y$
f 的逆像也唯一，则 f 为单射
若 $R_f = Y$，则 f 称为满射
若又是单射又是满射，则 f 称为双射或一一对应。

3.1.1 逆映射

设 $f : X \to Y$ 是单射，则有对应关系：

$$g : R_f \to X$$

$$y \mapsto x (f(x) = y)$$

构成 R_f 到 X 的映射，称为 f 的逆映射，记为 f^{-1}，其定义域为 $D_{f^{-1}} = R_f$，值域为 $R_{f^{-1}} = X$

3.1.2 复合映射

设有两个映射

$$g : X \to U_1$$

$$x \mapsto u = g(x)$$

和

$$f : U_2 \to Y$$

$$u \mapsto y = f(u)$$

如果 $R_g \subset U_2 = D_f$，那么就可以构造一个新的对应关系

$$f \circ g : X \to Y$$

$$x \mapsto y = f(g(x))$$

这是一个映射，我们将之称为 f 和 g 的复合映射。（关键在于 $R_g \subset D_f$ 是否成立）

要注意 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 一般是不同的。恒等式：

$$f \circ f^{-1}(y) = y, y \in R_f$$

；

$$f_{-1} \circ f(x) = x, x \in X$$

3.1.3 一元实函数

但 $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$ 则映射

$$f : X \to Y$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

称为一元实函数，简称函数。x 为自变量，y 为因变量，f 函数关系。

3.2 初等函数

基本初等函数有 6 类分别是：

1，常数函数：$y = c$；

2，幂函数：$y = x^\alpha(\alpha \in \mathbb{R})$；

3，指数函数：$y = a^x(a > 0 \wedge a \neq 1)$；

4，对数函数：$y = \log_a x(a > 0 \wedge a \neq 1)$；

5，三角函数：如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ 等；

6，反三角函数：如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等。

由基本初等函数经过有限次的四则运算与复合运算产生的函数称为初等函数。

初等函数的自然定义域是指自变量的最大取值范围，如 $\sin x$ 的自然定义域就是 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$，$\log_a x(a > 0, a \neq 1)$ 的自然定义域就是 $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$。

当两个函数的 f, D_f 相同时，为同一函数（即定义域与对应法则相同为同一函数）

3.3 函数表示

3.3.1 分段表示

如，$A \cup B \neq \emptyset$

$$f(x) = \begin{cases} \psi(x) & , \quad x \in A \\ \varphi(x) & , \quad x \in B \end{cases}$$

$A \cup B = D_f$, 这样的函数表示称为函数的分段表示。这里只分了两段，但其实可以分为任意有限段，甚至无限多段

3.3.2 显式与隐式表示

像 $y = f(x)$，因变量单独放等式的一边，另一边是只含自变量的表达形式，这称为函数的显示表示

而函数的隐式表示，是指通过方程 $F(x, y) = 0$ 来确定变量 y 与 x 的关系，这也是一种重要的表示形式

当只考虑圆方程的上或下半圆时，$x^2+y^2=R^2, y \geqslant 0$(或 $y \leqslant 0$) 就是它的隐式表示。

3.3.3 参数表示

表示 x, y 之间的关系时，需要引入参数 t，通过建立 t 与 x，t 与 y 之间的关系来确定 x, y 之间的关系，即

$$\begin{cases} x = x(t) \quad , \quad t \in [a,b] \\ y = y(t) \quad , \quad t \in [a,b] \end{cases}$$

这种方法叫函数的参数表示。

3.4 函数的简单特性

3.4.1 有界性

对于常数 m, M，使得函数 $y=f(x), x \in D$ 满足

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

称 f 在 D 有界，其中 m 为它的下界，M 为它的上界。

可知一个函数有界时它的上界和下界是不唯一的。

另一个有界函数定理是：存在常数 $M>0$ 使函数 $y=f(x), x \in D$ 满足 $|f(x)| \leqslant M, x \in D$

3.4.2 单调性

对函数 $y=f(x), x \in D, \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leqslant x_2$ 都有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称函数 f 在 D 上单调增加，记作 $f \uparrow$ 当 $\leqslant$ 变为 $<$ 时称为严格单调增加，记作 f 严格 $\uparrow$，同理有单调减少和严格单调减少。

在一个区间的连续的单射函数是单调的

3.4.3 奇偶性

函数 f 的定义域 D 关于原点对称，即是 $x \in D \iff -x \in D$，若对一切 x 有 $f(-x)=f(x)$ 则 f 是偶函数，若对一切 x 有 $-f(x)=f(-x)$ 则 f 是奇函数.

可以理解为奇函数关于原点对称，偶函数关于 y 轴对称。

3.4.4 周期性

若存在常数 $T > 0$ 使得对一切 $x \in D$，成立 $f(x+T) = f(x)$，则称函数 f 是周期函数，T 为它的周期，若存在满足上述条件的最小的 T，则称它为最小周期。

但并非每个周期函数都有最小周期的，如迪利克雷函数不存在最小周期。

3.5 幂函数（高中内容）

$f(x) = a^x$(a 是常数)，可知 $f(x)$ 恒过 (1,1)

4 指数与对数

4.1 指数

$x^n = a$，x 叫 a 的 n 次方根，$\sqrt[n]{a}$ 叫根式，n 为根指数，a 为被开方数。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

特别的有 $\sqrt[n]{0} = 0$;

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

运算性质：若 $a > 0, b > 0, r, s \in \mathbb{Q}$ 则

$$a^r a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$(ab)^r = a^r b^r$$

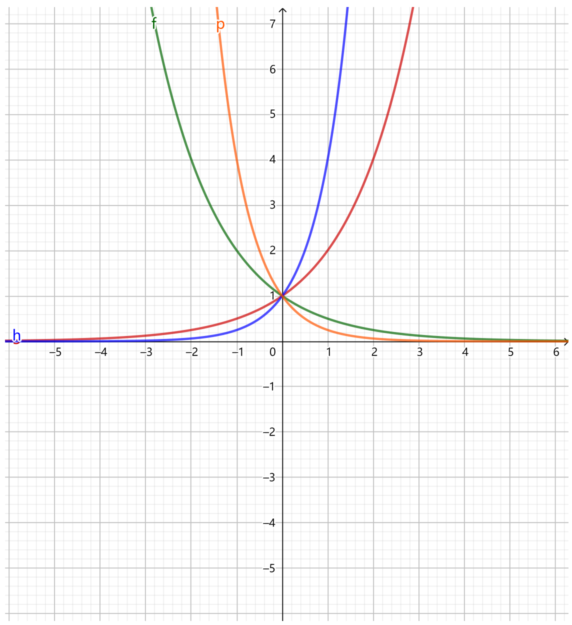
4.1.1 指数函数

$y = f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1, D_f = \mathbb{R})$
指数函数的图像恒过 $(0, 1)$

1，当 $a \in (0, 1)$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，而且当 a 越接近 0 时，函数变化率越大，设有 $a_1, a_2 \in (0, 1), a_1 > a_2$，那么有 $f_1(x) < f_2(x), x \in (-\infty, 0)$，和 $f_1(x) > f_2(x), x \in (0, +\infty)$;

2，当 $a \in (1, +\infty)$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，而且当 a 越接近 $+\infty$ 时，函数变化率越大，设有 $a_1, a_2 \in (1, +\infty), a_1 > a_2$，那么有 $f_1(x) < f_2(x), x \in (-\infty, 0)$，和 $f_1(x) > f_2(x), x \in (0, +\infty)$

如图下理解



其中 $f(x) = 0.5^x$ 为绿色，$f(x) = 0.25^x$ 为绿橙色，$f(x) = 2^x$ 为红色，$f(x) = 4^x$ 为蓝色。

4.2 对数

定义一种运算，若

$$a^x = N$$

有

$$\log_a N = x$$

其中 a 叫做底数，N 叫做真数。

特别的有：

$$\log_{10} x = \lg x$$

$$\log_e x = \ln x$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

；

运算性质：

1，

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

2，

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

3，

$$\log_a M^N = N \log_a M$$

换底公式：

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

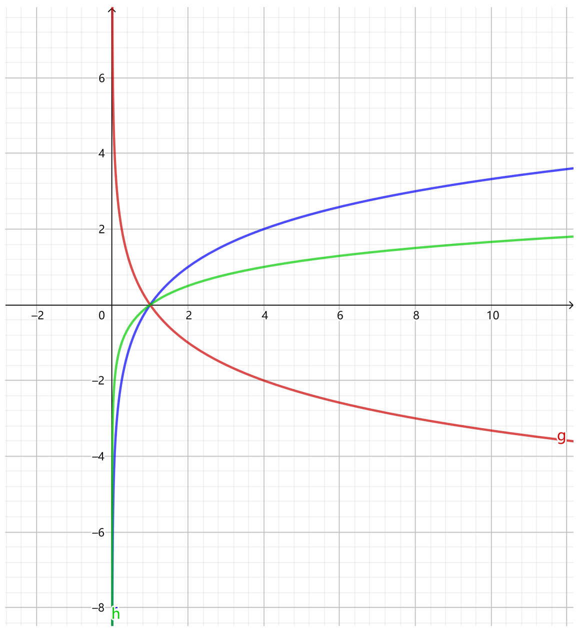
4.2.1 对数函数

$y = f(x) = \log_a x$ 对数函数，$D_f = (0, +\infty)$, 恒过点 (1,0)

1，当 $a \in (0,1)$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，而且当 a 越接近 0 时，函数变化率越小，设有 $a_1, a_2 \in (0,1), a_1 > a_2$，那么有 $f_1(x) > f_2(x), x \in (0,1)$，和 $f_1(x) < f_2(x), x \in (1,+\infty)$;

2，当 $a \in (1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而且当 a 越接近 $+\infty$ 时，函数变化率越小，设有 $a_1, a_2 \in (1,+\infty), a_1 > a_2$，那么有 $f_1(x) > f_2(x), x \in (0,1)$，和 $f_1(x) < f_2(x), x \in (1,+\infty)$.

如图下理解



其中蓝色为 $f(x) = \log_2 x$,红色为 $f(x) = \log_0 .5x$,绿色为 $f(x) = \log_4 x$.

4.3 反函数

设函数 $f(x) = y$，若得到一个函数 $g(y) = x$，这样的函数叫 $f(x) = y$ 的反函数，记作 $x = f^{-1}(y)$ 或 $arcf(x) = g(x)$, 其中有 $D_g = R_f, D_f = R_g$，一般存在反函数的条件是原函数是一一对应的。

4.4 函数应用 (求零点)

$f(x) = 0$ 时，x 的值叫做零点。

4.4.1 零点存在定理

高中的定义：如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图像是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$，那么，函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点，即存在 $c \in (a, b)$，使得 $f(c) = 0$，这个 c 也就是方程 $f(x) = 0$ 的根

数学分析中的定义：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则一定存在 $\xi \in (a, b)$，使 $f(\xi) = 0$。

顺带一提连续函数的定义：若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 的每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续；

以及函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的定义 (文字语言，$\varepsilon - N$ 语言太难懂了就不写了)：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域中有定义，且成立

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 连续，而称 x_0 是函数 $f(x)$ 的连续点

求零点的方法：二分法。

利用零点存在定理，将开区间一分为二，不断逼近零点

5 三角函数

5.1 角的一些定义

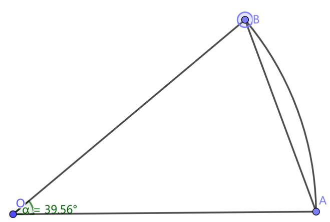
任意角：一个射线绕端点旋转到另一个位置的图形。有始边，终边以及一个角祖成。
规定按逆时针旋转的为正角，顺时针旋转为负角，没旋转就是零角。

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

与 α 终边相同的角组成集合 S：

$$S = \{\beta | \beta = \aleph + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

5.1.1 弧度制



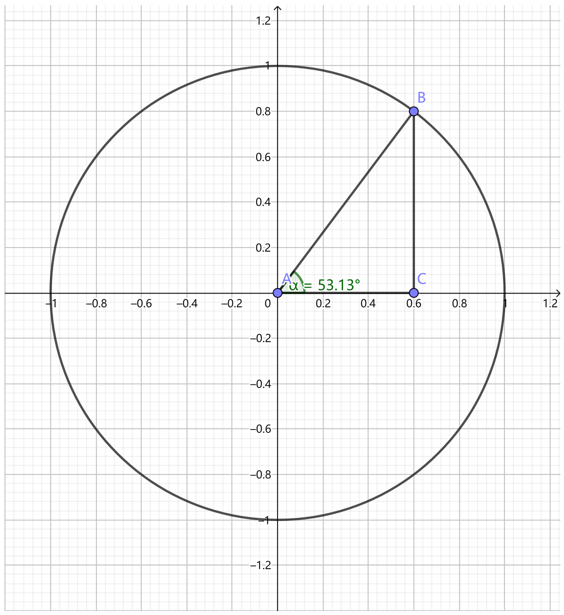
角度大小的一种表示方式，如图，弧 $AB = l$，$OA = r$, 由 $\alpha = \frac{l}{r}$，可知 α 的大小，单位为 rad，这就是弧度制。

有 $180^\circ = \pi rad$, 对于弧度制看可以类比 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 来记忆。

扇形公式：$\frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} = S$ 其中 $\frac{n^\circ}{360^\circ} = \frac{\alpha}{2\pi}$，则有

$$S = \frac{\alpha r^2}{2} = \frac{lr}{2}$$

5.2 三角函数一些简单变换



如图，该圆为半径为 1 的圆 (单位圆)，其圆上任意一点都可以用 (x, y) 表示，其中 $x^2 + y^2 = 1$，以 x 轴正半轴为始边，由初中知识可以知道第一象限单位圆的点可以用 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 表示，至此可以将三角函数的取值范围推广到任意角。

图中，单位圆上任意一点可以用 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 表示，α 就是始边为 x 轴正半轴逆时针旋转 α 的角，易知 $y = \sin\alpha, x = \cos\alpha, \tan\alpha = \frac{y}{x}$。

由任意角的知识可知

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha (k \in \mathbb{Z})$$

同理 $\cos\alpha, \tan\alpha$。

可以推出一个重要的恒等式：

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

5.2.1 诱导公式

诱导公式就是将一些角通过简单变换化为我们知道的角。不用背诱导公式，只要记住其内核，在脑内方可推算。

1，π 在弧度制中代表着 $180°$，所以三角函数中加或减 π 在几何意义上来说是将角加一个平角，也就是转一个 $180°$。

2，$-\alpha$ 意为着它向顺时针旋转 α，可以看作与 α 关于 x 轴对称。

理解以上两条就可以理解诱导公式了，一个小技巧：对于任意角 α 作的简单变换，都可以看作锐角 α 作的简单变换。

3，$\frac{\pi}{2}$ 就是 90°，这个稍微难理解一点，在转 90° 以后往往会 x,y 互相调换，可以画图来理解。

5.3 函数部分

5.3.1 正弦函数

$y=f(x)=\sin x$ 是最基本的正弦函数，易知 $D_f=\mathbb{R},R_f=[-1,1],T=2\pi$，$T$ 是它的最小正周期。

它的更一般形式是 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$

其中 A 为振幅决定 $f_{max}(x)$，

ω 决定最小正周期 T，有 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，

φ 决定左右移动量，左加右减，

B 决定上下移动量，上加下减

研究 $y=\sin x$ 便可知道一般形式的性质，在 $[0,2\pi]$ 的图形性质有周期性，在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上单调递增，有 $f_{max}(x)=f(\frac{\pi}{2})$ ，在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减，有 $f_{min}(x)=f(\frac{3\pi}{2})$；

对于不在 $[0,2\pi]$ 这个区间的可以用周期函数特性转换到这个周期中。

而对于研究一般形式下的正弦函数，只需要用换元法，令 $a=\omega x+\varphi$，转换成

$$y=A\sin a+B$$

例如研究最值 $f_{max}(a)=f_{max}(\omega x+\varphi)$ 进而算出 x

单调性，用诱导公式保证 $\omega>0$，则 a,x 同增异减。

当 $a\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ 时，带入 $x=\frac{a-\varphi}{\omega}$ 即可解出取值范围

5.3.2 余弦函数

$y=f(x)=\cos x$，通过诱导公式可知，

$$\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$$

所以研究余弦函数性质只需转换为正弦函数即可。

5.3.3 正切函数

$y=f(x)=\tan x$，一般形式 $y=A\tan(\omega x+\varphi)+B$，与正弦函数不同的是最小正周期为 $T=\frac{\pi}{\omega}$，以及 $D_f=\mathbb{R}\backslash\left\{\beta|\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{R})\right\}$，$R_f=\mathbb{R}$

5.4 恒等变换

和差角公式：

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

二倍角公式，由和差角公式推导的:

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

常用变形:

$$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$

$$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

恒等变换的技巧不多，多练习题就可以熟练掌握。

5.5 补充知识

一些二级结论，积化和差是数竞中比较常用的，辅助角书里有提到过，但我觉得还是蛮重要的。

5.5.1 积化和差，和差化积

这个主要是提高部分，正常情况下用处不大。

积化和差：

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

和差化积：

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

5.5.2 辅助角公式

$a\sin\alpha+b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)(ab\neq 0)$, 其中 φ 满足 $\tan\varphi = \frac{b}{a}, \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

很方便的转换形式的方法，如果觉得难以理解透，可以像以下步骤推一遍：

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$$

令 $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ，则原式化为：

$$\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin\alpha+\sin\varphi\cos\alpha)$$

小括号里的式子就是正弦的和角公式，故最后为：

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$

6 平面向量

高中向量是分平面向量与空间向量两个部分，但高中的空间向量与平面向量研究的东西差不多，就是多了一个维度，也没有对于空间中解析几何的涉及，因此也不会太难。

高中空间几何都不会太难，高考甚至到高联、CMO、IMO 这种竞赛级别的都不会难，因为空间解析几何难可以超级难，也可以特简单，难度中等的题很少，奥林匹克最初几届有过这种空间解析几何题，但到后面最近都没有空间解析几何题

题外话：我认为要研究真实世界的问题，空间解析几何是必不可少的知识，而欧氏几何又是对真实世界最直观的一种，所以应该学习。

6.1 定义与运算

既有大小又有方向的量称为向量 (矢量)，用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示；起点是 A 终点是 B 的向量用 $\overrightarrow{AB}$ 表示。

规定长度相等方向相同的有向线段为同一向量

向量的大小也称向量的长度 (模长)，记作 $|\vec{a}|, |\overrightarrow{AB}|$

i, 长度为零的向量称为零向量，记作 $\vec{0}$，方向不确定，或者说任意

ii, 长度为一的向量称为单位向量，与 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量记为 $\vec{a^0}$(这种记号在大学中可以用)

iii, 长度相等方向相反的向量为反向量，如 $\vec{a}, -\vec{a}$，$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

向量的加法

定义：对于 $\vec{a}, \vec{b}$ 做 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{AC}$ 表示为 $\vec{c}$ 称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$，这个公式表示向量的加法规则，称为三角形法则

高中的平行四边形法则以及一些乱七八糟的法则都可以用这个三角形法则推出来，只用记住三角形法则就行了；以及减法都是三角形法则的一种 $\vec{a} - \vec{b}$ 被定义为 $\vec{a} + (-\vec{b})$

对于向量加法有以下规律：

1, 结合律 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

2, 交换律 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

3,$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4,$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

数量积

实数 λ 与 $\vec{a}$ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 是一个向量，长度为 $|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$

$\vec{a^0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，这称为把 $\vec{a}$ 单位化。

向量的数量积满足以下规律：以下 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

1,$1\vec{a}=\vec{a},-\vec{a}=(-1)\vec{a}$
2,$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$
3,$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$
4,$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

6.1.1 内积

定义:$\vec{a},\vec{b}$ 的内积记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，规定为一个实数：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$$

(解析几何中) 也定义为:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\Pi_{\vec{b^0}}(\vec{a}))|\vec{b}|$$

其中 $\Pi_{\vec{b^0}}(\vec{a})$ 是 $\vec{a}$ 在方向 $\vec{b^0}$ 的分量

可以得出一些简单的推导：

1,$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$
2,$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

向量的内积满足以下规律：

1, 对称性 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
2, 线性性 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$
3, 线性性 $(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{b}$
4, 正定性 $\vec{a}\cdot\vec{a}\geqslant 0$，等号当且仅当 $\vec{a}=0$ 时成立

向量的投影 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 投影向量，方向与 $\vec{b}$ 同向，大小为 $\cos<\vec{a},\vec{b}>|\vec{a}|$ 也就是分量

6.2 坐标表示

几何平面中，一个点 O 和一个基 $\vec{d_1},\vec{d_2}(\vec{d_1},\vec{d_2}$ 不共线)，合在一起称为几何平面中的一个仿射坐标系，记作 $[O;\vec{d_1},\vec{d_2}]$，对于平面中任意一点 M，把它的定位向量 $\overrightarrow{OM}$ 在基 $\vec{d_1},\vec{d_2}$ 下的坐标称为点 M 在这个仿射坐标系的坐标

$$(x,y)^T \iff \overrightarrow{OM}=x\vec{d_1}+y\vec{d_2}$$

如果 $\vec{d_1},\vec{d_2}$ 互相垂直，且都是单位向量，则 $[O;\vec{d_1},\vec{d_2}]$ 称为一个直角坐标系，高中平面空间问题都是以直角坐标系为基础讨论的，空间中仿射坐标系也是像以上定义的，如果能清楚仿射坐标系与直角坐标系共同有的几何条件，就可以不被限制于固定的建系逻辑，直角标架只是仿射标架的一种，所以任何仿射标架的结论可以在直角标架中套用。

设直角标架 (高中内容都是直角标架) 中 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ 用终点坐标减去起点坐标即是两点间向量的坐标，在高中为区别点与向量，通常点的坐标直接写在它旁边，而向量的坐标需要与向量划等号才能表示。

向量的内积在坐标中设 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$ 则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$$

向量的长度用坐标计算

$$|(x,y)|=\sqrt{x^2+y^2}$$

6.3 平行与垂直判定

平行的判定

有 $\vec{a}//\vec{b} \iff \exists\lambda$ 使 $\vec{a}=\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$ 如果用坐标表示可以写成 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 也就是一个二阶行列式对于 0，高中为了方便记忆可以写成 $x_1y_2=x_2y_1$

垂直的判断

有 $\cos<\vec{a},\vec{b}>=0$ 时 $<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\pi}{2}$ 这两向量垂直，即是

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

用坐标表示就是

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

6.4 解三角形

这一部分是考的比较灵活的一部分，常常与其他章节联动，难度会增加

在这个小节，我们设 $\triangle ABC$ 中，顶点 A, B, C 对边分别是 a, b, c

6.4.1 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$
$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

其中 R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆。

常用于两边与两角的情况下

6.4.2 余弦定理

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

常用于三边与一角

6.4.3 常见方法

求 $\triangle ABC$ 面积 $S_{\triangle ABC}$, 有

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$$

齐次方法：通过 $\frac{a}{\sin A} = 2R$，将等式两边转换，常配合余弦定理使用。例如:

$$\sin Ab = \sin Ca$$

$$ab = ac$$

6.5 补充

1，倍长中线定理

由初中的倍长中线定理，推出，设 O 为 BC 中点，A 为 BC 外一点，有

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$$

2，A,B,C 三点共线，P 为线外一点，有

$$\overrightarrow{PB}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PC}$$

其中一定有 $x+y=1$，这个结论蛮有趣的，可以自己去推导以下，以及三维中形式，本质都是一样的。

7 复数

复数这一节基本算高考最简单的一节，但复数本身不简单，在数学竞赛里平面几何的一些证明，以及一些在三维空间定位的四元数都属于复数的拓展，在高中我们会学习一些复数的定义与四则运算，以及三角形式。

7.1 复数定义

把几何 $C=\{a+bi|a,b\in\mathbb{R}\}$ 中的数，即是形如 $a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ 的数叫做复数，其中 i 叫做虚数单位，定义 $i^2=-1$，集合 C 被称为复数集。

复数通常用 z 表示，即 $z=a+bi$，这一形式称为复数的代数形式，其中 a 被称为复数 z 的实部，b 称为虚部。

复数相等的条件，规定：

$$a+bi=c+di(a,b,c,d\in\mathbb{R}) \iff a=c,b=d$$

对于复数 $z=a+bi$ 可以进行以下分类：

i, 当 $b=0$ 时，z 是实数

ii, 当 $b\neq 0$ 时，z 是虚数

iii, 当 $b\neq 0$ 且 $a=0$ 时，z 是纯虚数

共轭复数：

实部相等，虚部为相反数的两个复数互为共轭复数

$$z=a+bi\bar{z}=a-bi$$

在复数上方打一横表示它的共轭复数。

7.2 四则运算

与实数一样。

7.3 复平面

复数的几何意义，复数 $z=a+bi$，可用点 $Z(a,b)$ 表示，这个建立的直角坐标系表示复数的平面做复平面，其中 x 轴叫实轴，上面的点表示的是

实数；y 轴叫做虚轴，上面的点表示纯虚数。

一个复数在复平面上可以看作一个向量，其中定义复数的模长为：

$$|z| = |a + bi| = r = \sqrt{a^2 + b^2}(r \geqslant 0, r \in \mathbb{R})$$

7.4 复数的三角形式

复数的三角形式 $z = r(\cos\theta + \sin\theta)$，其中 r 表示复数的模长，θ 辐角主值可以知道：

$$a = r\cos\theta b = r\sin\theta$$

辐角：表示复数在复平面中代表的向量与 x 轴正半轴的夹角，显然辐角有无穷个，定义辐角主值在 $(0, 2\pi]$ 的一个辐角；辐角主值用 $arg\theta$ 表示

复数三角形式的常见推导：

i,$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$，推导过程：

$$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + \sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + \sin\theta_2)$$

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

ii,$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$ 推导过程：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + \sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + \sin\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

7.5 补充

i，对于 $z = \frac{x+yi}{a+bi}$ 转换为 $\varphi + \lambda i = z$：
利用 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 得出 $z = \frac{(x+yi)(a+bi)}{a^2+b^2}$ 推出

$$\varphi = \frac{xa - yb}{a^2 + b^2}, \lambda = \frac{xb + ya}{a^2 + b^2}$$

这个结论不用死记硬背，只需要知道利用什么条件推出的即可。

ii，二元一次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 中，如果其中一个根是复数 z，则另一个根是它的共轭复数 $\overline{z}$, 仅在 $\Delta \leqslant 0$ 时由此结论。

iii，如果对于复数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，有 $z \neq 1, z^n = 1$ 时，说明有 $\sum_{i=0}^{n-1} z^i = 0$，这个是我做竞赛题的时候推出来的，用处不大。

8 立体几何

新版的这一章节内容是老版必修二的第一章空间几何体与第二章点线面关系组成，内容多，东西杂，二级结论也很多，但是只要记住那五个公理和九个定理的用法，做起题来就不会复杂。

8.1 基础立体几何图形

多面体：由若干个平面多边形围成的几何体叫多面体，各个多边形叫做多面体的面，相邻两个面的公共边叫做多面体的棱，棱与棱的公共点叫做多面体的顶点。

旋转体：由一个平面图形绕它所在平面内的一条定直线旋转所形成的封闭几何体，这条定直线叫旋转体的轴。

一、多面体

1，棱柱：一般地，有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫做棱柱。
i，两个互相平行的面叫做底面
ii，除底边外的其余各面叫做棱柱的侧面
iii，相邻侧面的公共边叫做棱柱的侧棱
iiii, 侧棱与地面的公共顶点叫做棱柱的顶点

底边是 n 边形的棱柱是 n 棱柱 $(n \geqslant 3, n \in \mathbb{Z})$

侧棱不垂直于底面的棱柱叫做斜棱柱。
侧棱垂直于底面的棱柱叫直棱柱。
底面是正多边形的直棱柱叫做正直棱柱

2，棱锥：一般地，有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的多面体叫做棱锥。
i，多边形面叫做底面。
ii，有公共顶点的各三角形面叫做侧面。
iii，各侧面的公共顶点也叫棱锥的顶点。

iiii，相邻侧面的公共边叫做棱锥的侧棱

底边是 n 边形的棱锥是 n 棱锥 $(n \geqslant 3, n \in \mathbb{Z})$
用顶点和底面各顶点字母表示棱锥，如 $S-ABCD$

正棱锥：如果一个棱锥的底面是正多面体，并且顶点在底面的射影是底面的中心，这样的棱锥叫正棱锥。各棱长均相等的四面体叫正四面体。

3，棱台: 用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面与截面之间的部分，这样的多面体叫做棱台。
原棱锥的底面和截面分别叫做棱台的下底面和上底面，棱台也有侧面、侧棱、顶点。

由 n 棱锥截得的棱台是 n 棱台 $(n \geqslant 3, n \in \mathbb{Z})$
正棱台：由正棱锥截得的棱台叫做正棱台，正棱台各侧棱相等，各侧面都是全等的等腰梯形。

二、旋转体

4，圆柱: 以矩形的一边所在直线为旋转轴，其余三边旋转形成的面所围成的旋转体叫做圆柱。
i，旋转轴叫做圆柱的轴。
ii，垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的底面。
iii，平行于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面。
iiii，无论旋转到什么位置，不垂直于轴的边都叫做圆柱侧面的母线。

圆柱和棱柱统称柱体，圆柱侧面展开是矩形。

5，圆锥：以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫做圆锥。
i，旋转轴叫做圆锥的轴。
ii，垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆锥的底面。
iii，不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做圆锥侧面。

iiii，无论旋转到什么位置，不垂直于轴的边都叫做圆锥的母线。

圆锥和棱锥统称为锥体。

6，圆台：用平行于圆锥底面的平面去截圆锥，底面于截面之间的部分叫圆台。
与圆柱圆锥一样，圆台也有轴、底面、侧面、母线。

7，球：以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的旋转体叫做球体，简称球。
半圆的圆心叫做球的球心，半圆的半径也是球的半径。

用一个平面去截球，球心到截面的距离 d 与球半径 R 以及截面圆的半径 r 满足：$r=\sqrt{R^2-d^2}$。

8.2 直观图

画空间几何时，常常用斜二测画法，斜二测画法是将三维物体平行投影到二维平面的一种画法。

1，将 x 轴和 y 轴交于一点 O，使 $\angle xOy=45°$。

2，原平面中平行 x 轴的线段，长度不变，平行于 y 轴的线段为原平面中的一半。

8.3 体积公式

体积公式：
棱柱体积：$V=Sh$
棱锥体积：$V=\frac{1}{3}Sh$
棱台体积：$V=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS_1}+S_1)$
圆柱体积：$V=\pi r^2h$
圆锥体积：$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$
圆台体积：$V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr_1+r_1^2)$
球体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

表面积公式：

圆柱表面积：$S = 2\pi r(r+l)$

圆锥表面积：$S = \pi r(r+l)$，圆锥侧面积：$S = \pi rl$

圆台表面积：$S = \pi(r_1^2 + r^2 + rl + r_1 l)$

球表面积：$S = 4\pi R^2$

8.4 点线面关系与公理

线与线之间：分为异面直线和共面直线，共面直线又分为相交直线和平行直线。

线与面之间：分为直线在平面内和直线在平面外，直线在平面外又分为平行于相交关系。

面与面之间：平行或相交。

接下来是四个公理 (新教材叫基本事实)

公理 1：过不在一条直线的三个点，有且只有一个平面。(不共线的三点确定一个平面)

公理 2：如果一条直线上两个点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内。

公理 3：如果两个不重合的平面，有一公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线。

公理 4：平行于同一直线的两条直线平行。

这些公理乍看之下是废话，但却很有用；公理 1234 可以以点线面平行来记忆。另外还有一个等角定理

定理 1：如果空间中两个角的邻边分别平行，那么这两个角相等或互补。

8.5 平行的定理

四条关于平行的定理：

定理 2：如果平面外一直线与平面内任一直线平行，则该直线与该平面平行

定理 3：一条直线与一个平面平行。如果过该直线的平面与该平面相交，则交线与该直线平行。

定理 4：如果一个平面内两条相交的直线与平面平行，那么这两个平面平行。

定理 5：两个平面平行，如果另一个平面与这两个平面相交，那么两条交线平行。

可以看出来其实就是平面与直线的平行互相转换，我画了一个转换图，但碍于能力不够，无法添加在该讲义里，后续我整体查漏补缺时再补上，如果我忘了，记得提醒我。。。

8.6 垂直的定理

定理 6：如果一条直线与一个平面内的两条相交的直线垂直，则这条直线与该平面垂直。

定理 7：垂直于同一平面的两条直线平行。

定理 8：如果一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直。

定理 9：两个平面垂直，如果一个平面内有一条直线垂直于这两个平面的交线，那么这条直线与另一个平面垂直。

8.7 二面角

从一条直线出发的两个半平面，所组成的图形叫做二面角，这条直线叫二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面。棱为 AB。面为 α, β 的二面角记作“二面角 $\alpha - AB - \beta$”

二面角的平面角：二面角 $\alpha - l - \beta$ 中 l 上的一点 P 为垂足，分别在 α, β 平面上作垂直于 l 的 PA, PB 射线, 二面角的平面角取值范围 $[0, 2\pi]$

一般地，两个面相交，如果它们所成的角是直二面角，就说两个平面互相垂直 $\alpha \perp \beta$。

8.8 补充

立体几何不要死记硬背，要灵活的使用定理，作几何题不管是平面解析几何还是空间解析几何，特别是高中的题，做不做的出来都是次要的，一定要优雅的解出来，阅卷人对于格式和方法都有着重，如果能用最少的步骤又严谨 (高中知识) 的证明，那么阅卷人很难不给满分 (我瞎掰的)。

后期我在加一点立体几何的二级结论，眼熟一两个可以一定程度上提高效率。

9 统计

高中概统部分不会考难，主要是记忆点知识多，耗时间计算大，22 年全国一卷就可以看出来，计算量不是一般的大，也没啥特殊的技巧，就多练。

9.1 随机抽样

总体：调查对象的全体。

个体：组成总体的每一个调查对象。

全面调查/普查：对每一个调查对象都进行调查。

抽样调查：从总体中抽取一部分个体进行调查，并以此为依据对总体的情况做出估计和推断。

样本：从总体抽出的那部分个体。

样本量/样本容量：样本中包含的个体数。

简单随机抽样：一个总体含 N 个个体，从中逐个抽取 $n(n \in [1, N))$ 个个体做为样本，如果抽取放回/不放回，且每次抽样时总体内或未进入样本的各个个体被抽到的概率相等。(除特殊说明，一般简单随机抽样指不放回简单随机抽样) 如：

1，抽签法

2，随机数法

总体均值/总体平均值:总体有 N 个个体,变量值分别为 $Y_i(i = 1, 2, \ldots, N)$，则称 $\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$ 为总体均值。

如果总体的 N 个变量中，不同的值共有 $k(k \leqslant N)$ 个，不妨记为 $Y_i(i = 1, 2, \ldots, k)$ 其中 Y_i 出现的频数为 f_i，则可以写成加权平均数 $\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i Y_i$

如果从总体中抽取一个容量为 n 的样本,它们的变量值为 $y_i(i = 1, 2, \ldots, n)$，则称 $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ 为样本均值。

分层随机抽样：一般地，按一个或多个变量把总体划分成若干个子总体，每个个体仅属于一个子总体，在每个子总体中独立进行简单随机抽样，再把所有子总体中抽样的样本合在一起作总样本。

每一个子总体称为层，如果每层样本的量与层的大小成比例，那么称这种样本量的分配方式为“比例分配”

9.2 用样本估计总体

使用“频率分布表”和“频率分布直方图”来整理和表示数据。(频率 = 频数/样本数)

画图步骤：

1，求极差：$X_{max} - X_{min}$

2，决定组数与组距：分组可以是等距的或不等距的，一般组距相等，且力求取整；组数 = 极差/组距

3，将数据分组

4，列频率分布表：如第 n 组频数/样本容量

5，画频率分布直方图：y 轴为频率/组距，x 轴为数据的意义，小长方形面积 = 组距 · 频率/组距 = 频率。

数字特征

中位数：数据量是偶数时：$\frac{x_1+x_2}{2}$；奇数时：中间的那个数。

众数：出现频率最大的数。

平均数：$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

方差：$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - \overline{x}$

标准差：$\sqrt{s^2} = s$

第 P 百分位数

$i = n \times p\%$，其中 n 为总体，$p\%$ 为百分位数，分为两种情况讨论：

i 是整数：第 i 项与 $(i+1)$ 项之和 $\div 2$

i 不是整数：取比 i 大的第一个整数 j，百分位数为 j

当只有表格没有具体数值时用以下方法求：设样本数据的 $p\%$ 分位数为 i

1，先从低到高相加频率，直到第 n 组包含 $p\%$

2，设第 n 组分组为 $[x, y)$，x 对应数据 a，y 对应数据 b，i 对应数据 c，则

$$x + \frac{c-a}{b-a} \cdot (y - x) = i$$

离散程度

均值距离为 $|x_i - x|$

方差的大小反映了离散程度，方差越小离散程度越小。

9.3 补充

$\sum$ 计算，

$$\sum_{i=1}^{n} ax_i + by_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i$$

如果有两组数据，那么它们的平均方差的关系：

先来看简单的情况，如果 $y_i = ax_i + b$，容易知道：

$$\overline{y} = a\overline{x} + b$$

$$S_y = |a|S_x$$

再来看看更加一般的情况：

设有两组数据 $x_i, y_j(i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m)$ 则有

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \overline{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_j$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2, S_y^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(y_j - \overline{y})^2$$

设总体平均数为 $\overline{a}$，总体方差为 b^2，推出：

$$\overline{a} = \frac{n\overline{x} + m\overline{y}}{m + n}$$

$$b^2 = \frac{1}{m+n}[nS_x^2 + mS_y^2 + n(\overline{x} - \overline{a})^2 + m(\overline{y} - \overline{a})^2]$$

方差比较难记，但不会常考到，可以分为两部分来理解：

1，$nS_x^2 + mS_y^2$ 是它们的层内方差

2，$n(\overline{x} - \overline{a})^2 + m(\overline{y} - \overline{a})^2$ 是它们的层外方差

这个可以自己推一下，对记忆有帮助，但就是比较麻烦。

10 概率

10.1 随机试验

随机试验：对随机现象的实现和对它的观察，简称试验用 E 表示。
特点：

i，可重复进行

ii，所有结果明确可知，不止一个

iii，每次试验得到可能结果的一个，但事先无法确定

性质：

i，有限性 (有限样本空间)

ii，不唯一

样本点：试验中每个可能的基本结果。

样本空间：全体样本点组成的集合；一般用 $\varOmega$ 表示样本空间，ω 表示样本点。

有限样本空间：一个试验有 n 个结果，是有限的。

随机事件 (简称事件)：样本空间的子集。

基本事件：只包含一个样本点的事件。

特别的：

$\varOmega$ 作为本身的子集，$\varOmega$ 必然发生，我们称 $\varOmega$ 为必然事件。

ϕ 不包含任何的样本点，称之为不可能事件。

10.2 事件关系

研究概率论我们需要用到集合的工具来描述。

与集合类似的有包含被包含等：

事件 A 包含事件 B$B \subseteq A$

事件 A 和事件 B 相等 $B = A$

交事件或积事件 $A \cap B, AB$

并事件或和事件 $A \cup B, A + B$

如果 $A \cap B = \phi$，则称事件 A 和事件 B 互斥 (或互不相容)

如果 $A \cap B = \phi, A \cup B = \varOmega$ 则称事件 A 和事件 B 互相对立；A 的对立事件可以记为 $\overline{A}$

10.3 古典概型

概率：随机事件发生的可能性大小的度量，A 的概率用 $P(A)$ 表示

古典概率模型：简称古典概型，有以下几个共同特征：
i，有限性：样本空间的样本点只有有限个
ii，等可能性：每个样本点发生的可能性相等

一般地，设试验 E 是古典概型，样本空间 Ω 包含 n 个样本点，事件 A 包含 k 个样本点，则定义事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ 是它的古典定义，$n(A), n(\Omega)$ 表示 A 和 Ω 包含的样本点个数。

基本性质
(1)，对任意事件 A，都有

$$P(A) \geqslant 0$$

(2)，必然事件概率为 1. 不可能事件概率为 0

$$P(\Omega) = 1, P(\phi) = 0$$

(3)，如果事件 A 与事件 B 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$，推广：如果事件 $A_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ 互斥则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(4)，如果事件 A 与事件 B 互为对立事件，则

$$P(B) = 1 - P(A), P(A) = 1 - P(B)$$

(5)，如果 $A \subseteq B$，那么 $P(A) \leqslant P(B)$
(6)，设 A, B 是一个随机试验中的两个事件，我们有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

对于任意事件 A, B，如果 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称 A, B 相互独立，简称独立。

频率

频率的稳定性：随着试验次数 n 增加，频率偏离概率的幅度会缩小，即 $f_n(A)$ 逐渐稳定于 $P(A)$ 概率。

11 空间向量

与平面向量的知识差不多，多了一个维度而已，研究的问题也据有套路化，因为光知道一个向量，没有空间解析几何，也就是线面之间简单的关系上做点文章。

11.1 线性运算与空间向量

与平面向量相同的：模、零向量、单位向量、相反向量、共线向量 (平行向量)、相等向量的概念。

方向向量：我们把与 $\overrightarrow{a}$ 平行的非零向量称为直线 l 的方向向量。

共面向量：平行于同一个平面的向量。

空间内三个向量共面的充要条件是 $\overrightarrow{p} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$

线性计算与平面向量一样

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} >$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$$

如果四点 A, B, C, D 共面则有一点 O 使得：

$$\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC} + z\overrightarrow{OD}$$

其中

$$x + y + z = 1$$

11.2 基本定理

定理 1：如果三个向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 不共面，那么对于任一空间向量 $\overrightarrow{p}$，存在唯一的有序实数组 (x, y, z) 使得 $\overrightarrow{p} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}$ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 叫做空间中的一个基底，$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 叫做基向量。如果三个基向量两两垂直，且长度均为 1，那么这个基底叫做单位正角基底，对于任意向量可以写成 $\overrightarrow{p} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}$，这个过程叫正交分解。

以上是高中数学书给的定义，限于学的知识太少，不能给出更准确的定义。

学了解析几何的我们知道，在一个几何空间中还需要一个点 O 才能与三个向量构成一个仿射坐标系，高中默认 O 为原点，再进行的建系。所以几何空间中一个基更准确的记法是 $\{O;\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2},\overrightarrow{d_3}\}$

高中研究的空间坐标问题都是以右手系的直角标架为基础研究，高中里斜二测画法奠定了三维视图基础，因为是右手系所以 x、y、z 轴是按逆时针分布的。

右手系直角标架是广为应用的一个仿射坐标系。像在计算机图形学中 OpenGL 里也是右手系笛卡尔坐标系 (直角坐标系的另一种说法)。

有些结论只要是仿射坐标系都有，但有些是右手系直角标架特有的，如果学有余力可以区分一下，在研究比较一般问题时就不会被直角坐标系的思维限制。

11.3 坐标运算

在坐标系 (以下默认都是右手系空间直角标架)$\{O;\overrightarrow{j},\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}\}$ 中，设 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$; $\lambda\in\mathbb{R}$ 则有：

$$\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

$$\lambda\overrightarrow{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$$

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}\iff\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\iff\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$$

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+}$$

空间中两点间距离公式：

$$P_1P_2=|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+}$$

空间中两点中点公式：

$$P=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$$

法向量：直线 $l\perp\alpha$，取 l 的方向向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{a}$ 就是平面 α 的法向量，方向量的长度随意但不能为 0.

11.4 线面关系证明

直线与直线：

平行:$\exists\lambda\in\mathbb{R}:\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{b}$

垂直：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$

夹角：$\cos\theta=|\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}|$

直线与平面：设 $\overrightarrow{m}$ 是平面 α 的法向量

平行：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{m}=0$

垂直：$\exists\lambda\in\mathbb{R}:\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{m}$

夹角：$\gamma=\frac{\pi}{2}-\theta$

平面与平面：设平面 π_1,π_2 的法向量分别为 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$

平行：$\exists\lambda\in\mathbb{R}:\overrightarrow{n_1}=\lambda\overrightarrow{n_2}$

垂直：$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$

二面角：$\theta=<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>$, 二面角为 α, 有 $\theta=\pi-\alpha$

11.5 补充

二面角是算其中比较复杂的，判断二面角的正负比较麻烦，通常只用通过观察来判断正负，但如果没有图则需要在两法向量与各自所垂直的平面的交点，连接这两交点，令其为一个向量 $\overrightarrow{a}$，如果两法向量与 $\overrightarrow{a}$ 的内积同号，则 α 与 θ 互补，如果内积异号则 α 与 θ 相等。

这算一个偏冷门的考点，一般来说都可以直接看图判断，很少用到这个。

空间中点线面距离

其实就研究 1，点到面 2，线到面 3，点到线；都可以转到点与线面的关系

1，点到面

设 $M\in\pi,N\in\pi,M\neq N,P\notin\pi,\overrightarrow{PM}\perp\pi\ \overrightarrow{n}\perp\pi$，已知 $P,N,\overrightarrow{n}$

PM 即为所求

$$|\overrightarrow{PM}|=|\cos<\overrightarrow{PN},\overrightarrow{n}>|\cdot|\overrightarrow{PN}|=\frac{|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PN}|}{|\overrightarrow{n}|}$$

主要是记思路。

2，线到面

找到线上一点转换成点到面的问题即可。

3，点到线

设 $P \notin l, M \in l, N \in l, Q \in l, M \neq N \neq Q, \overrightarrow{PM} \perp l$，已知 P, N, Q，PM 即为所求

$$|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{|\overrightarrow{PN}|^2 - (\cos < \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{QN} > \cdot |\overrightarrow{PN}|)^2}$$

教科书用方向向量其实是一样的，这个更直观，其实就是勾股定理。

还有一个是研究异面直线距离的题，高中教材里不论是新教材选修一，还是旧教材选修 2-1 里面都没有对异面直线距离的定义，但是我在有些高中教辅上看到了有关内容，用高中的知识其实就可以解出来，但这是个冷冷冷门考点，至少我从来没有在立方体基础题以外的题做到过，大概率是因为书上都没有这个定义。如果用解析几何的知识可以比较直观的理解，其实异面直线的距离就是它们两方向向量与两直线上分别一点的连线组成的向量的混合积模长除以两方向向量外积的模长。

12 直线和圆的方程

研究平面上直线与圆的方程，这一章和圆锥曲线是平面几何中比较灵活的部分，一题可以有很多种解法，如果只会一种解析法那么考试中很可能因为这类题拖慢做题速度，要理解几何直观与代数方程之间的关系，几何中有很多定理都是等价定理，将问题转换成容易点的等价命题是关键，其次才是记二级结论。

12.1 直线

12.1.1 倾斜角与斜率

倾斜角：直线 l 与 x 轴正方向上，向上的方向之间的角 $\alpha, (0^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ)$

斜率：直线 l 的倾斜角 α 的正切值，用 k 表示。

$\tan\alpha = k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$\begin{cases} \alpha \in (0^\circ, 90^\circ) & k > 0 \\ \alpha = 90^\circ & k \text{ 不存在} \\ \alpha \in (90^\circ, 180^\circ) & k < 0 \end{cases}$$

当 $l_1 // l_2$ 时，有 $k_1 = k_2$

当 $l_1 \perp l_2$ 时，有 $k_1 \cdot k_2 = -1$

12.1.2 直线方程

点斜式：$y - y_0 = k(x - x_0)$，由 $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 推出，其中 $(x_0, y_0) \in l$

常用变式：$y = k(x - x_0) + y_0$

斜截式：$y = kx + b$

截距：直线 l 与 y 轴的交点 $(0, b)$ 的 b 叫做 l 在 y 轴上的截距。

截距式：$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, (ab \neq 0)$ 其中 a, b 分别是 l 在 x 轴、y 轴上的截距。

两点式：设 l 上有两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 则由点斜式推出：

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

比较常用的变式：

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

一般式：$Ax+By+C=0$(其中 A,B 不都为 0)；
化为斜截式形式就是：$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$

两点间距离公式：$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
两直线交于点 P，将两个直线的一般式联立求解可得。

点 $P(x_0,y_0)$ 到直线的距离公式：$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

设 $l:Ax+By+C=0$，则 $\overrightarrow{a}=(A,B)$，有 $\overrightarrow{a}\perp l$。(在空间解析几何中也有类似结论，设平面 $\pi=Ax+By+Cz+D=0$，则 $\overrightarrow{a}(A,B,C)^T$ 是平面 π 的一个法向量)

平行线间的距离公式：$l_1//l_2, l_1=Ax+By+C_1=0, l_2=Ax+By+C_2=0$
则 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

12.2 圆

圆可以看作定点到定长的点组成的集合，因此这个定点 O，和定长 r 就是定义一个圆的关键。

圆的标准方程：圆心 $A(a,b)$ 半径为 r 的圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，是由 $(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$ 转换的。
当 $D^2+E^2-4F>0$ 则该图像是一个圆，$D^2+E^2-4F=0$ 则是一个点，$D^2+E^2-4F<0$ 则是一个虚圆。

12.3 直线与圆的位置关系

直线与圆的位置关系分为：相离，相切，相交。

可以通过圆心与直线的距离 d，和圆的半径 r 来判断他们的位置关系。

$$\begin{cases} r<d & \text{相离} \\ r=d & \text{相切} \\ r<d & \text{相交} \end{cases}$$

也可以通过联立它们两的方程，消去一个未知数，得到一个一元二次方程，判断它的零点个数，它的零点个数就表示直线与圆的交点个数。

12.4 圆与圆的位置关系

圆与圆关系分为：相离，相切，相交，内切，内含。

主要是通过两个圆的半径与两圆心距离 d 的关系来判断的

$$\begin{cases} d>r_1+r_2 & \text{相离} \\ d=r_1+r_2 & \text{外切} \\ |r_1-r_2|<d<r_1+r_2 & \text{相交} \\ d=|r_1-r_2| & \text{内切} \\ d<|r_1-r_2| & \text{内含} \end{cases}$$

12.5 补充

待补充 (之后我会补充些重要点的二级结论，平几二级结论又多又杂)

13 圆锥曲线

计算大、变化丰富、难一直是圆锥曲线的代号，变态的是联合其他知识点，比如与直线交点、轨迹、三角形面积等，难度仅次于导数，高考热点压轴题也是。

13.1 椭圆

定义：把平面内两个定点 F_1, F_2 的距离的和等于常数 (大于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹叫做椭圆。

这两个定点叫做椭圆的焦点，$|F_1F_2|$ 叫做焦距。

点 M 在这个椭圆上满足 $|MF_1| + |MF_2| = 2a(2a > |F_1F_2|)$。

椭圆的标准方程 (1)：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$，它表示焦点在 x 轴上，焦点分别是 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 的椭圆，这里 $a^2 = b^2 + c^2$。

椭圆的标准方程 (2)：$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$，它表示焦点在 y 轴上，焦点分别是 $F_1(0, -c), F_2(0, c)$ 的椭圆，这里 $a^2 = b^2 + c^2$。

a、b 的几何意义：a 是椭圆的半长轴，b 是椭圆的半短轴。

离心率：用 e 表示，有

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

可以看出 $e \in (0, 1), c^2 = a^2 - b^2$。

13.2 双曲线

定义：把平面内两个定点 F_1, F_2 的距离的差的绝对值等于非零常数 (小于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹叫做双曲线。

这两个定点叫做双曲线的焦点，焦点间的距离叫做双曲线的焦距。

双曲线的标准方程 (1)：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$，它表示焦点在 x 轴上，焦点分别是 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 的双曲线，这里 $c^2 = a^2 + b^2$。

双曲线的标准方程 (2)：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，它表示焦点在 y 轴上，焦点分别是 $F_1(0,-c),F_2(0,c)$ 的双曲线，这里 $c^2=a^2+b^2$。

离心率：$e=\frac{c}{a}$，因为 $c^2=a^2+b^2>a^2$，所以 $e\in(1,+\infty)$。

渐近线：双曲线无限延伸，逐渐接近的一条直线，双曲线标准方程右侧的 1 换成 0 后的方程就是该双曲线的渐近线方程。

a,b 的几何意义：a 为双曲线的实半轴长，即是双曲线与坐标轴相交点与圆心的距离。b 为虚半轴长。

等轴双曲线：实轴和虚轴等长的双曲线叫做等轴双曲线，标准方程为：$x^2-y^2=a^2$ 或者 $y^2-x^2=a^2$，其中 $e=\sqrt{2}$，渐近线为 $y=\pm x$。

13.3 抛物线

定义：把平面内与一个定点 F 和一个条定直线 $l(l$ 不经过点 $F)$ 距离相等的点的轨迹叫做抛物线，点 F 叫做抛物线的焦点，直线 l 叫做抛物线的准线。

当抛物线焦点在 x 轴上时，其标准方程：

$$y^2=2px(p>0),\text{焦点 }F(\tfrac{p}{2},0),\text{准线方程}x=-\frac{p}{2}$$

$$y^2=-2px(p>0),\text{焦点 }F(-\tfrac{p}{2},0),\text{准线方程}x=\frac{p}{2}$$

当抛物线焦点在 y 轴上时，其标准方程：

$$x^2=2px(p>0),\text{焦点 }F(0,\tfrac{p}{2}),\text{准线方程}x=-\frac{p}{2}$$

$$x^2=-2px(p>0),\text{焦点 }F(0,-\tfrac{p}{2}),\text{准线方程}x=\frac{p}{2}$$

14 数列

数列这一章，大多数时候考点是具有套路的，高中里研究等差和等比数列，算是初等数学的范畴，到数学分析中高等数学会以数列的极限为引子，研究函数的极限。所以主讲初等数学的内容。

14.1 数列的定义

数列是指按正整数编了号的一串数，表示为 a_n 或 x_n，其中 a_n 代表第 n 项，a_n 为通项。

按照数列的项分类，可分为有穷数列和无穷数列。

按照数列的项的变化趋势，可分为：

1，递增数列：从第 2 项起，每一项都大于它的前一项。
2，递减数列：从第 2 项起，每一项都小于它的前一项。
3，常数列：各项相等。
4，摆动数列：无规律。

数列可以看作一个函数：$D_f = \mathbb{N}^+, f(n) = a_n$，因此通项公式可以看作函数 $f(n)$ 的解析式。

通项公式：如果数列 a_n 的第 n 项与序号 n 之间关系可以用一个式子表示，则这个公式叫做该数列的通项公式，通项公式并不一定唯一，也并非所有数列都有通项公式。

递推公式：如果已知数列 a_n 的第 1 项 (或前几项)，且从第 2 项 (或某一项) 开始任意一项 a_n 与它前一项 a_{n-1}(或前几项) 间关系可以用一个公式表示，那么这个公式就是递推公式。

14.2 等差数列

等差数列：从第 2 项起，每一项与前一项的差等于同一个数；这个数叫做公差，用 d 表示。

等差中项：如等差数列 $a_n = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$，其中 a_2 叫做 a_1 与 a_3 的等差中项；可知

$$a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = d$$

$$\frac{a_3+a_1}{2}=a_2$$

等差数列的通项公式：等差数列的首项记为 a_1，公差为 d，则 $a_n=a_1+(n-1)d$

由数列任意两项可求公差，即：$\frac{a_n-a_m}{n-m}=d$

等差数列的性质：

1，$d>0 \iff a_n$ 是递增数列，$d=0 \iff a_n$ 是常数列，$d<0 \iff a_n$ 是递减数列。

2，若 $\frac{m+n}{2}=k(m,n,k\in\mathbb{N}^+)$，则 $a_m+a_n=2a_k$。

3，若 $m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbb{N}^+)$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$。

4，若 a_n 是有穷数列，则 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1=\ldots=a_i+a_{n-1-i}=\ldots}$。

5，数列 λa_n+b 的公差为 λd。

6，下标成等差数列且公差为 m 的项 $a_k,a_{k+m},a_{k+2m},\ldots$ 组成公差为 md 的等差数列。

7，若 b_n 也是等差数列，则数列 $a_n\pm b_n,ka_n\pm b_n$ 也是等差数列。

判断一个数列是否是等差数列的方法：

1，定义法：$a_n-a_{n-1}=d(n\in\mathbb{N}^+) \iff a_n$ 是等差数列。

2，递归法 (等差中项法)：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbb{N}^+) \iff a_n$ 是等差数列。

3，通项法：$a_n=pn+q(n\in\mathbb{N}^+) \iff a_n$ 是等差数列。

4，前 n 项求和公式法：$S_n=An^2+Bn(n\in\mathbb{N}^+) \iff a_n$ 是等差数列。

等差数列前 n 项和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

14.3 等比数列

等比数列：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于一个常数，那么这个数列叫做等比数列，这个常数叫做公比，用 q 表示 $(q\neq 0)$。

等比中项：如等比数列 $a_n=a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots,a_n$，其中 a_2 叫做 a_1 与 a_3 的等比中项；其中有 $a_2^2=a_1a_3$

等比数列的通项公式：等比数列 a_n 的首项为 a_1，公比为 q，则 $a_n = a_1 q^{n-1}$

等比数列的性质：

1，$a_1 > 0, q > 1$ 或者 $a_1 < 0, 0 < q < 1$ 可推出 a_n 为递增数列;$a_1 < 0, q > 1$ 或者 $a_1 > 0, 0 < q < 1$ 可推出 a_n 为递减数列。
2，若 $m, n, p(m, n, p \in \mathbb{N}^+)$ 成等差数列，则 a_m, a_n, a_p 成等比数列，即 $a_n^2 = a_m \cdot a_p$
3，若 $m + n = p + q(m, n, p, q \in \mathbb{N}^+)$，则 $a_m a_n = a_p a_q$。
4, 若 a_n 是有穷等比数列，则 $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \ldots$。
5，数列 λa_n 的公比仍是 q；若数列 b_n 是公比为 q_1 的等比数列，则数列 $a_n \cdot b_n$ 是公比为 $q \cdot q_1$ 的等比数列。

等比数列的前 n 项和公式：

$$S_n = \begin{cases} na_1(q=1), \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}(q \neq 1) \end{cases}$$

15 导数

导数涉及到极限概念，是高等数学的东西，高中在没有函数极限的基础上直接就学导数，导致大部分东西都需要靠背，就比如说链式法则是靠微分来描述的，链式法则在高中就是一个比较难得去背的点，对于二级结论更是只能靠硬记；这样记住的东西毫无意义，但如果自己推导出来就完全不一样，像是很多微分中值定理，以前推出来二阶导判断凹凸性到现在还记得，所以如果学有余力的同学，可以拿一本数学分析从数列极限到函数极限再到微分和微分中值定理都补一补。

我不会从头开始讲，但为了更好理解一些导数中的结论，我会讲微分。

15.1 微分的概念

一个给定函数 $f(x)$ 在点 x 附近有定义，若 $f(x)$ 的自变量 x 处产生了某个增量 Δx 变成了 $x+\Delta x$，那么它的函数值也相应的产生了一个增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$；这里 $\Delta x, \Delta y$ 分别是自变量和应变量的差分。

定义：对函数 $y = f(x)$ 定义域中的一点 x_0，若存在一个只与 x_0 有关，而与 Δx 无关的数 $g(x_0)$，使得当 $\Delta x \to 0$ 时恒成立关系式

$$\Delta y = g(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处的微分存在，或称 $f(x)$ 在 x_0 处可微。

其中 $o(x_0)$ 是高阶无穷小量，$g(x)\Delta x$ 是 Δy 的线性主要部分，因为 $g(x)\Delta x$ 是低阶无穷小量，在加减时起主要影响。

当 $f(x)$ 在 x 处是可微的且 $\Delta x \to 0$ 时，我们将 Δx 称为自变量的微分，记作 dx，而将 Δy 的线性主要部分 $g(x)dx$ 称为因变量的微分，记作 dy 就有了

$$dy = g(x)dx$$

例如：$y = f(x) = x^2$，可知

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

其中 Δx^2 是高阶无穷小量，$g(x) = 2x$，则 $dy = d(x^2) = 2xdx$。

可微必连续，但连续不一定可微

15.2 导数的概念

若 $f(x)$ 在 x_0 处可微，则有关系式

$$\Delta y = g(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

由于 $g(x_0)$ 与 Δx 无关，即知 $g(x_0)$ 是当 $\Delta x \to 0$ 时，因变量差分与自变量差分的比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限值。

定义：若函数 $y = f(x)$ 在其定义域中的一点 x_0 处极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并称这个极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$。

若 $f(x)$ 在一区间每一点可导，则称 $f(x)$ 在该区间可导 $f(x)$ 在 x_0 处的导数还有如下等价定义

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

函数 $f(x)$ 的所有可导点的几何是 $f(x)$ 定义域的子集，上面的定义可以构成一个新的函数 $f'(x)$，称它为 $f(x)$ 的导函数。可知 $D_{f'} \subseteq D_f$

由微分关系式可知其 $g(x)$ 就是 $f'(x)$ 故有

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$dy = f'(x)dx$$

因此导数也叫微商。

对于一元函数，可微 $\iff$ 可导

15.3 函数的性质与导数的关系

导数的几何意义：曲线的切线斜率就是极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

的值，即 $f(x)$ 在 x 处的导数值。

不难知道，当导数值小于 0 时函数单调递减，导数值大于 0 时函数单调递增；我们可以有这一性质来简单的画一个函数的草图。

函数的极值，定义：设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 有定义，$x_0 \in (a,b)$，如果存在点 x_0 的某一个邻域 $O(x_0,\delta) \subset (a,b)$ 使得：

$$f(x) \leqslant f(x_0), x \in O(x_0,\delta)$$

则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个极大值点，$f(x_0)$ 称为相应的极大值，类似的有极小值点，它们统称极值；极值是相对与附近的，是一个局部性质。

有 x_0 是 $f(x)$ 的一个极值点，则 $f'(x_0) = 0$。

15.4 常用导数及运算法则

计算一个函数的导函数的运算称为对这个函数求导。

导数的四则运算法则：设 $f(x), g(x)$ 在某一区间上都是可导的，则对于任意常数 c_1, c_2，它们的线性组合 $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ 也在该区间上可导，且满足如下线性运算关系：

$$[c_1 f(x) + c_2 g(x)]' = c_1 f'(x) + c_2 g'(x)$$

$f(x), g(x)$ 它们的积函数也在该区间上可导，满足：

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$g(x)$ 在某区间可导，且 $g(x) \neq 0$，则它的倒数也在该区间可导：

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

推论：

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

反函数求导法则：若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续、严格单调递增、可导并且 $f'(x) \neq 0$，记 $\alpha = min(f(a+), f(b-)), \beta = max(f(a+), f(b-))$，则它们的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 (α,β) 上可导，且有：

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)}$$

可以由这些定理推出基本初等函数的导数公式，这些没什么技巧看眼熟就行，实在不行自己再推一遍。

多个函数的导数四则运算很少会用到，因为考试的话计算量太大了，但我还是写一写

$$\left[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i'(x)$$

其中 $c_i(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ 为常数

$$\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = \sum_{j=1}^{n} \left\{ f'(x) \prod_{i=1, i\neq j}^{n} f_i(x) \right\}$$

复合函数是我们遇到的更多的情况，所有我们研究复合函数求导

设函数 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 可导，而函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 处可导，则复合函数 $y = f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 可导，且有

$$[f(g(x))]'_{x=x_0} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

复合函数的求导规则可以写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

一般称为链式法则

15.5 补充

看情况补充一些，隐函数求导、微分中值定理等的概念，还有一些求导方法，洛必达泰勒一些常用方法。

16 计数原理

计数原理属于组合数学里的东西，组合数学的题就是我们通常所说的“杂题”，在数学竞赛中有些甚至与数论齐名的难度，这种题高考一般不会遇到，不过这个计数原理在我们生活中是非常有用的，我觉得是为数不多对我们生活起直接作用的数学方法；可以将排列组合应用于生物遗传计算、概率论等等，更方便的研究概率的东西。

16.1 加法和乘法原理

分类加法计数原理：完成一件事有两类不同方案，在第一类方案中有 m 种不同的方法，在第二类方案中又 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m + n$ 种不同的方法。

可以推广为：完成一件事有 n 类不同的方案，在第 i 类有 m_i 种不同的方法，则完成这件事共有 $N = \sum_{i=1}^{n} m_i$ 种不同的方法。

分步乘法计数原理：完成一件事需要两个步骤，做第一步有 n 不同的方法，做第二步有 m 种不同的方法，则完成这件事共有 $N = m \cdot n$ 种不同的方法。

同样可以推广：完成一件事需要 n 个步骤，做第 i 步有 m_i 不同的方法，则完成这件事共有 $N = \prod_{i=1}^{n} m_i$ 种不同的方法。

要分清楚“分类”和“分步骤”完成的区别，在它们结合在一起时先分类在明确步骤。

16.2 排列与组合

排列的定义：从 n 个不同的元素中取出 $m(m \leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

排列数：从 n 个不同元素中取出 $m(m \leqslant n)$ 个元素的所有不同排列，这个的个数叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示。

排列数的一些公式：

阶乘：定义如果 $n \in \mathbb{N}^+$，则 n 的阶乘为 $\prod_{i=1}^{n} i$，用 $n!$ 表示；特别的 $0! = 1$。

排列数公式：$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1), n, m \in \mathbb{N}^+$，并且 $m \leqslant n$，排列数的公式可以写成：$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

全排列：将 n 个不同元素每一个都抽出来的一个排列叫全排列，这时全排列的排列数为 $A_n^n = n!$

组合的定义：一般地，从 n 个不同元素中取出 $m(m \leqslant n)$ 个元素合成一组，叫从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。组合问题与元素的顺序无关。

组合数：从 n 个不同元素中取出 $m(m \leqslant n)$ 个元素的所有不同组合，这个的个数叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示，也有用 $\binom{n}{m}$ 表示的，注意上下顺序与前者相反。

组合数公式：

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}$$

还可以写成：$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$，规定 $C_n^0 = 1$。

组合数具有性质：

1，$C_n^m = C_n^{n-m}$

2，$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

可以看出 $A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m$，对于组合数我们可以简记，如 $C_{100}^3 = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3}$，把分式下面部分给去掉就是组合数了。

16.3 二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n, n \in \mathbb{N}^+$$

简记为：

$$\prod_{i=1}^{n}(a+b) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

左边我不用指数用求连乘积是为了更直观的体现，左边有 n 项，而右边有 $n+1$ 项。

其中 C_n^i 叫做二项式系数。

通项：二项展开式中第 $k+1$ 项 $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k, (0 \leqslant k \leqslant n, k \in \mathtt{N}^+)$ 叫做二项展开式的通项。

二项式系数的性质

1，对称性：与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等，即 $C_n^k = C_n^{n-k}$。

2，增减性与最大值：当 $k < \frac{n+1}{2}$ 时二项式系数是逐渐增大的，由对称性可知后面逐渐减小，最大值在中间；

i，当 n 是偶数时，中间的一项 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 为最大值

ii，当 n 为奇数时，中间的两项 $C_n^{\frac{n-1}{2}}, C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等且同时为最大值。

3，各二项式系数的和，推导过程：

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n$$

令 $x=1$ 就得到：

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$$

16.4 补充

(待补充) 后续在补充一些关于组合数学的内容，例如鸽巢原理，染色原理等高考出现过的一些组合数学偏难怪考点。

17　随机变量

这一章没啥好说的，高考试卷每次固定出一道概统大题，新教材加了全概率公式和贝叶斯公式，通常会在概统题里给出公式,22 年新一卷可以看出，这道大题会有比较大量的计算，拉高做题的时间成本。

这一章属于概率论的基本概念，因此也会有比较严格的定义，对于全概率公式和贝叶斯公式等想进一步了解的可以看“概率论与数理统计”的书。

17.1　条件概率与独立事件

条件概率：在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率，用 $P(B|A)$ 表示，有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

乘法定理：

$$P(B|A)\cdot P(A)=P(AB)$$

如果事件 B，C 互斥，则有：

$$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$$

如果 A，B 相互独立，则：

$$P(B|A)=P(B)$$

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=P(A)\cdot P(B)$$

全概率公式：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

贝叶斯公式：

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)},i=1,2,\ldots,n$$

17.2　离散型随机变量及其分布

对于随机试验样本空间 Ω 中每个样本点 ω，都有唯一实数 $X(\omega)$ 与之对应，称 X 为“随机变量”。

离散型随机变量：可能取值为有限个或可以一一列举的随机变量。

离散型随机变量 X 可能取不同的值为 $x_i, (i = 1, 2, \ldots, n)$ 这每一个值的概率 $P(X = x_i) = p_i$ 可以用表格表示，则称为 X 的概率分布列，简称为分布列。可知

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

如果 $P(A) = p$，则 $P(\overline{A}) = 1 - p$ 则称 X 服从两点分布，或 0-1 分布。

17.3 离散型随机变量数字特征

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ 为 X 的均值或数学期望，简称期望。

对于 X 为两点分布，如成功的概率为 P，则 $E(X) = P$；对于独立重复试验下，$E(X) = nP$。

设 $Y = aX + b$ 则它的分布列为：

Y	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	$ax_3 + b$
P	P_1	P_2	P_3

且有 $E(Y) = aE(X) + b$

随机变量 X 的方差 $D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$，有时记为 $Var(X)$。

称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差，记为 $\sigma(X)$。

如果 X 成两点分布，有 $D(X) = P - P^2 = P(1 - P)$，

如果 X 为重复独立重复试验：$D(X) = nP(1 - P)$

17.4 独立重复试验

1，伯努利试验 (独立重复试验)：只包含两个可能结果的试验；将伯努利试验独立重复 n 次，则称为 n 重伯努利试验，有以下特征：

(1)，同一伯努利试验重复做 n 次 (概率相同)；

(2)，各次试验结果相互独立

独立重复试验 $P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$。

2，一般地，在 n 重伯努利试验中，设每次试验中事件 A 发生的概率为 $P(0 < P < 1)$，用 X 表示 A 发生的次数，则 X 的分布列为

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

如果有以上形式的，则称 X 服从二项分布，记作 $X~B(n,p)$。

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=\sum_{k=0} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=[p+(1-p)]^n=1$$

3，超几何分布

一般地，设一批产品有 N 件，其中有 M 件是次品，从 N 件中随机抽取 n 件 (不放回)，用 X 表示抽取 n 件的次品数，X 分布列为 $P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k=m,m+1,m+2,\ldots,r$ ，其中 $n,N,M\in\mathbb{N}^+,M\leqslant N,n\leqslant N,m=max0,n-N+M,r=minn,M,$ 如过有以上形式，则称 X 服从超几何分布。

令 $p=\frac{M}{N}$，则 p 是次品率，$\frac{X}{n}$ 是抽取 n 件中的次品率，有 $E(X)=np$

顺带一提新版教材和旧版教材在超几何分布的定义上有些不同。

17.5 正态分布

1，连续型随机变量：取值往往充满整个实轴，但取一点的概率为 0。

2，正态曲线，$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in\mathbb{R}$，其中 $\mu\in\mathbb{R},\sigma>0$ 为参数。

对于任意的 $x\in\mathbb{R},f(x)>0$，它们的图像在 x 轴上方，可证 x 轴和曲线区间区域面积为 1；我们称 $f(x)$ 为正态密度函数，称为正态密度曲线，简称正态曲线。

若 X 服从参数 μ,σ 的正态分布，则记 $X~N(\mu,\sigma^2)$，特别的当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，称 X 服从标准正态分布。

3，正态曲线有以下特点：

(1)，曲线是单峰的，关于 $x=\mu$ 对称。

(2)，$x=\mu$ 时，达到峰值 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$。

(3)，当 $|x|$ 无限增大，曲线无限接近 x 轴。

(4)，x 轴与曲线间区域面积为 1。

若 $X~N(\mu,\sigma^2)$，则 $E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$。特别的

$$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx 0.6827$$

$$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

18 成对数据统计分析

这一章是统计学里两章内容缩水糅杂在一起的，理解上可能有点跳跃，有条件可以看看统计学的书，样本相关系数涉及到 n 维向量内积的方法还是蛮新颖的，可以推出柯西不等式的方法。

18.1 成对数据的统计相关性

变量间的关系常见的有两类：一类是确定关系，即函数关系；另一类是变量与变量间虽然确定存在关系，但又没有确切到可有其中一个去精确的决定另一个的程度，这种关系叫相关关系。

如果从整体看，一个变量增加时，另一个变量的相应值也呈现增加的趋势，则称这两个变量为正相关；如果一个变量增加时另一个变量减小则称这两个变量为负相关。

散点图：成对数据可以用表格表示，也可以用点的形式表示为 (x_i, y_i)，这一串点的图叫做散点图。

线性相关：如果两个变量的取值呈正/负相关，而且散点落在一条直线附近，则称这两个变量线性相关。

设 $s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}, s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$，$x'_i = \frac{x_i-\overline{x}}{s_x}, y'_i = \frac{y_i-\overline{y}}{s_y}$

则有

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

其中 r 称为 x 和 y 的样本相关系数。

当 $r > 0$ 时，称成对数据正相关，这是一个数据变小，另一个数据通常也变小；一个数据变大，另一个数据通常也变大；反之当 $r < 0$ 时一个变小另一个通常变大。

将 $x'_i, y_i\prime, (i = 1, 2, \ldots, n)$ 分别看成 $\overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y'}$ 在 n 维上的坐标；则 $\overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y'}$ 的内积公式可以推出，$r = \cos\theta$，故 $r \in [-1, 1]$。

当 $|r|$ 越接近 1 时，线性相关程度越强；$|r|$ 越接近 0 时，线性相关程度越弱。

当 $|r|=1$ 时 $\theta=0$，故 $\overrightarrow{y'}=\lambda\overrightarrow{x'}$。即

$$\frac{y_i-\overline{y}}{s_y}=\lambda\frac{x_i-\overline{x}}{s_x}, i=1,2,\ldots,n$$

表面 (x_i,y_i) 都落在直线 $y-\overline{y}=\frac{\lambda s_y}{s_x}(x-\overline{x})$ 上

18.2 一元线性回归模型及其应用

1，散点大致分布在一条直线附近：

$$\begin{cases} Y=bx+a+e \\ E(e)=0, D(e)=\sigma^2 \end{cases}$$

该式为 Y 关于 x 的一元线性回归模型，其中，Y 为因变量/响应变量，x 为自变量/解释变量；a,b 为模型的未知参数，a 为截距参数，b 为斜率参数；e 是 Y 与 $bx+a$ 间的随机误差。

2，最小二乘估计

将 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 称为 Y 关于 x 的经验回归方程，也称经验回归函数或经验回归公式，图形为经验回归直线，求经验回归方程的方法叫最小二乘法，求得 $\hat{b},\hat{a}$，叫做 b,a 的最小二乘估计。

其中

$$\begin{cases} \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2} \\ \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x} \end{cases}$$

整体接近程度 $Q=\sum_{i=1}^n(y_i-bx_i-a)^2=\sum_{i=1}^n e_i^2$

对于响应变量 Y，通过观测的数据为观测值，通过经验回归方程得到的 $\hat{y}$ 称为预测值，$Y-\hat{y}$ 称为残差。

可以用 R^2(决定系数) 为比较两个模型的拟合效果。

$$R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^n(y_i-\hat{y_i})^2}{\sum_{i=1}^n(y_i-\overline{y})^2}$$

18.3 列联表与独立性检验表

分类变量：讨论如“吸烟是否会增加患肺癌风险”的问题，常用一种特殊的随机变量，以区别不同的现象或性质。

2×2 列联表：将数据分类统计，做成表格的数据统计表，例如：

	Y=0	Y=1	合
X=0	a	b	a+b
X=1	c	d	c+d
合	a+c	b+d	a+b+c+d

有

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

当 χ^2 越大，X，Y 相关性就越强。(旧教材中 χ^2 用 K^2 表示)

$\chi^2 = k$，k 为观测值，有一套临界值表：

犯错概率	$P(\chi^2 \geqslant k_0)$	0.5	0.40	...
观测值	k_0	0.455	0.708	...

通过 χ^2 的取值推断 X 和 Y 是否独立的方法称为 χ^2 独立性检验 (卡方独立性检验)，简称独立性检验。

判断 $X = 1$ 和 $Y = 1$ 间是否有关联，需判断假定关系是否成立

$$H_0 : P(Y = 1|X = 0) = P(Y = 1|X = 1)$$

称 H_0 为零假设或原假设。